研究主題：「K」金矩形

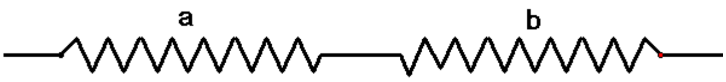
摘要：

從「黃金矩形」的邊長比值中，發現了一個很特別的現象，就是一對具有小數點後的每一個對應的數字都一模一樣的無理數；又從對此數字的研究中，聯想到這樣的一對數是否與某種特殊矩形的邊長比有關。我們將這類特殊矩形命名為「K 金矩形」，而「K 金矩形」的邊長比具有很多特殊的性質，將它們表示成繁分數或無窮根式，都具有很美的型式；另外就像黃金矩形對應於費氏數列，K 金矩形的邊長比也可以找到一個類似費氏數列的數列來與之對應。

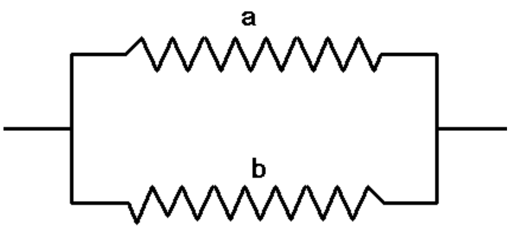
用到的概念：

本研究除了一般的數學概念或公式之外，還需用到電阻串、並聯的公式：

1. 電阻的串聯公式：兩個電阻分別為 a（Ω）及 b（Ω）的電阻串聯，
   其總電阻為 a+b（Ω）。



2. 電阻的並聯公式：兩個電阻分別為 a（Ω）及 b（Ω）的電阻並聯，
   其總電阻為 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$（Ω）。



壹、研究動機：

在上資優班課程的時候，老師帶我們探討了有關「黃金矩形」的性質，讓我們認識了何謂「黃金矩形」，會計算它的邊長比例，以及它與費氏數列的關係。後來我們去圖書館翻閱相關資料，在一本叫做「神奇數學 117」的書中，看到了兩個數，一個是：如果你用黃金矩形的長邊:短邊，其比值為 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576…；另一個是短邊：長邊的比值為 0.61803398874989484820458683436563811772030917980576…（詳見神奇數學 117 之第 152 頁），好特別的兩個數喔！這兩個數都是無理數（小數點後無限多位且不循環），而且它們互為倒數，另外它們除了整數不同之外，小數點後的每一個對應的數字都

一模一樣；另外書中還有將黃金比$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$表示成繁分數$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$和無窮根式$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}}}$（都是很美的型式），這引起我們極大的興趣；雖然我們可以舉出一堆互為倒數的例子（如：$\frac{7}{3}$與$\frac{3}{7}$等…）；也可以舉出一堆小數點後的每一個對應的數字都一模一樣的數（如：$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\cdots$；$\frac{8}{7}=1.142857142857\cdots\cdots$；$\frac{15}{7}=2.142857142857\cdots\cdots$），可是如果限制既要為倒數又要小數點後所有的對應的數字都要一模一樣的話，是否還有這樣的答案呢？如果有，那跟黃金矩形跟費氏數列又有什麼關聯呢？因為想要知道這個問題的答案，因此我們展開對這個問題的研究工作。

本研究「K」金矩形名稱的由來：因為我們研究主題的原始構想來自於「黃金矩形」，而且我們從數字的研究中，發現都與類似「黃金矩形」的矩形有關，因此我們將本研究命名為「K」金矩形。

貳、研究目的：

一、探討除了$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（黃金矩形中長邊：短邊的比值）、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（黃金矩形中短邊：長邊的比值）之外，是否存在互為倒數的兩數且它們小數點後的每個對應的數字都一模一樣。

二、探討這樣的兩個數，它們與黃金矩形的邊長比的關係。

三、探討如何利用尺規作圖作出 K 金矩形。

四、探討 K 金矩形邊長的比值與繁分數和無窮根式的關係。

五、探討 K 金矩形邊長的比值與費氏數列的關係。

叁、研究器材與設備：

計算機、計算紙、筆、電腦和人腦、Excel 軟體、GSP 繪圖軟體、一顆想挑戰的心。

肆、研究過程與方法：

一、探討除了$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（黃金矩形中長邊：短邊的比值）、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（黃金矩形中短邊：長邊的比值）之外，是否存在互為倒數的兩數且它們小數點後的每個對應的數字都一模一樣。

【研究過程說明】因為兩數互為倒數，所以可以假設兩數分別為 x 和 $\frac{1}{x}$；且因為它們小數點後面對應的數字都一模一樣，所以可得 $x-\frac{1}{x}$ 必為整數，我們分段討論如下：

（一）當 x 為正數時，

1、 若 1＜x＜2 時，則 $0<\frac{1}{x}<1$，

$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x}<0$

$\Rightarrow 0<x-\frac{1}{x}<2$　　所以 $x-\frac{1}{x}=1$

$\Rightarrow x^2-1=x$　　$\Rightarrow x^2-x-1=0$　　$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（取正）

$\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 就是黃金比（只有一解）

2、 若 2＜x＜3 時，則 $0<\frac{1}{x}<1$，

$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x}<0$

$\Rightarrow 1<x-\frac{1}{x}<3$　　所以 $x-\frac{1}{x}=2$

$\Rightarrow x^2-2x-1=0$　　$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）

$\Rightarrow x=1+\sqrt{2}=2.41421356237309504880168872420 97\cdots\cdots\cdots\cdots$

而 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1=0.4142135623730950488016887242097\cdots\cdots\cdots\cdots$

也是只有一解

3、若 3＜x＜4 時，則 $0<\frac{1}{x}<1$，

$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x}<0$

$\Rightarrow 2<x-\frac{1}{x}<4$　　所以 $x-\frac{1}{x}=3$

$\Rightarrow x^2-3x-1=0$　　$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$（取正）

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3.3027756377319946465596106337352\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\Rightarrow$ 而 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=0.3027756377319946465596106337352\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

也是只有一解。

4、同理可得，當 $4<x<5$ 時，

$$x=\sqrt{5}+2=4.236067977499789696409173668731\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\sqrt{5}-2=0.236067977499789696409173668731\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

5、照類似方法，我們將結果列成下表：

	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$4<x<5$	$5<x<6$	$6<x<7$	‧‧‧‧
x	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$	$\sqrt{5}+2$	$\dfrac{\sqrt{29}+5}{2}$	$\sqrt{10}+3$	‧‧‧‧
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$	$\sqrt{5}-2$	$\dfrac{\sqrt{29}-5}{2}$	$\sqrt{10}-3$	‧‧‧‧

6、一般化，若 $k<x<k+1$ 時（k 為自然數），則 $0<\dfrac{1}{x}<1$，

$$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x}<0$$

$\Rightarrow k-1<x-\dfrac{1}{x}<k+1$　　則可得 $x-\dfrac{1}{x}=k$

$\Rightarrow x^2-kx-1=0$　　$\Rightarrow x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$（取正）　　$\therefore x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{k^2+4}+k}=\frac{2\times(\sqrt{k^2+4}-k)}{(\sqrt{k^2+4}+k)\times(\sqrt{k^2+4}-k)}$$

$$=\frac{2\times(\sqrt{k^2+4}-k)}{4}=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$$

7、小結：實際計算後發現，當 x 為大於 1 的數時，在每兩個連續自然數 k 和 k+1 之間，均正好有一個唯一的數，與其倒數的差為一個整數。

（二）當 x 為負數時：

1、若 $-2<x<-1$ 時，則 $-1<\dfrac{1}{x}<0$，

$$\Rightarrow 0<-\frac{1}{x}<1$$

$\Rightarrow -2<x-\dfrac{1}{x}<0$　　所以 $x-\dfrac{1}{x}=-1$

$\Rightarrow x^2-1=-x$　　$\Rightarrow x^2+x-1=0$　　$\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（取負）

$$\Rightarrow x=\frac{-(1+\sqrt{5})}{2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

只有一個解，而且就是黃金比（$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）的相反數。

2、若－3＜x＜－2 時，則$-1<\frac{1}{x}<0$，

$$\Rightarrow 0<-\frac{1}{x}<1$$

$\Rightarrow -3<x-\frac{1}{x}<-1$　　所以 $x-\frac{1}{x}=-2$

$\Rightarrow x^2-1=-2x$　　$\Rightarrow x^2+2x-1=0$　　$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$（取負）

$$\Rightarrow x=\frac{-(2+\sqrt{8})}{2}=-\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=-1-\sqrt{2}=-(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=-(\sqrt{2}-1)$$

只有一個解，且正好是$(\sqrt{2}+1)$的相反數。

3、在實際計算之後，發現這樣的答案正好是 x 為正數時的答案的相反數，我們推論如下：

【已知】若 a 為大於 1 的正數，且$a-\frac{1}{a}$為整數

【求證】$(-a)-(-\frac{1}{a})$也是整數。

【證明】因為 a>1　　所以$0<\frac{1}{a}<1$

$$(-a)-(-\frac{1}{a})=(-a)+\frac{1}{a}=-(a-\frac{1}{a})$$

因為已知$a-\frac{1}{a}$為整數　　所以$-(a-\frac{1}{a})$也是整數。

4、小結：”若 x 為負數，且$x-\frac{1}{x}$為整數”， 答案正好是”若 x 為正數，且$x-\frac{1}{x}$為整數”的相反數。

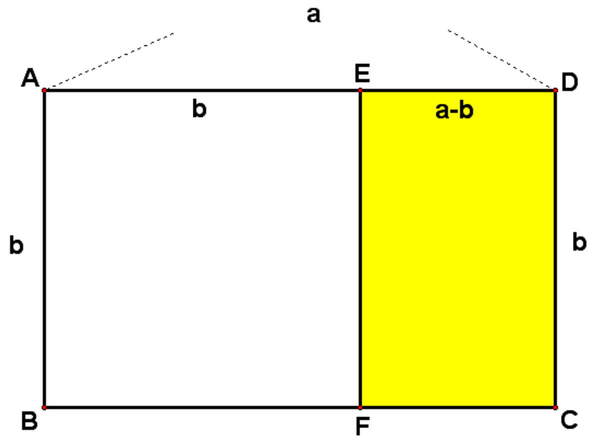
二、探討這樣的兩個數，它們與黃金矩形的邊長比的關係：

【研究過程說明】因為$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$和$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$兩數是由黃金矩形的長邊：短邊或是短邊：長邊的比值求得的，因此我們很自然的想到，上面所得的每一對的數，是否也與某個類似於黃金矩形的矩形其邊長的比值有關。

（一）黃金矩形的邊長比：（前人已研究）

「黃金矩形」的意義：某個矩形若去除掉一個最大的正方形後，剩下的矩形與其本身相似，此矩形就稱為「黃金矩形」。

如圖，設「黃金矩形」的長邊為 a，短邊為 b



∵ＡＢＣＤ～ＤＥＦＣ　　∴a：b=b：(a－b)

$\Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$

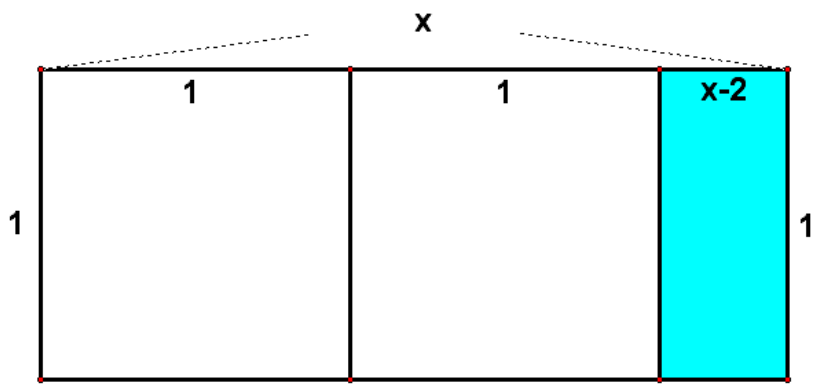
同除以b^2：$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$　　$\Rightarrow (\frac{a}{b})^2 - (\frac{a}{b}) - 1 = 0$　　令$\frac{a}{b} = x$

可得$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$（取正）

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

（二）若將矩形的定義修改為：可以連續去除掉兩個最大的正方形後，剩下的矩形與本身相似，這樣的矩形存在嗎？

這裡為了便於討論，令此矩形的短邊為１單位、長邊為 x 單位



可得比例式 x：1=1：(x－2)

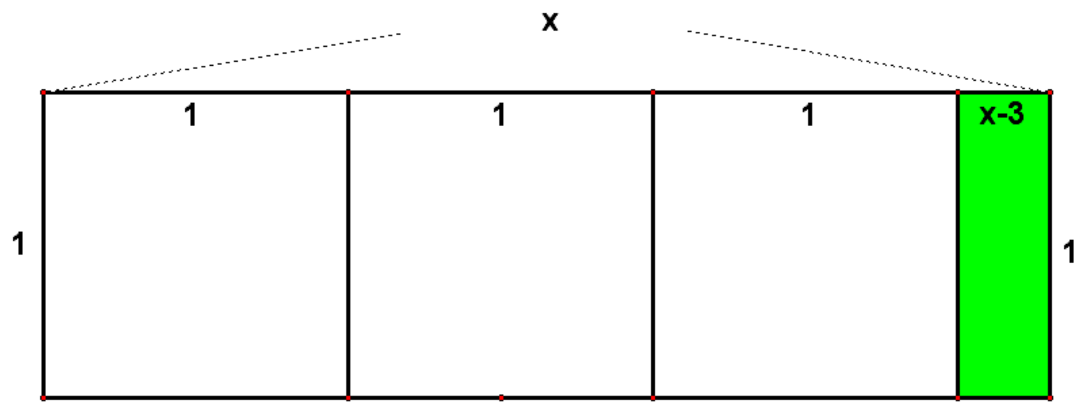
$x^2 - 2x - 1 = 0$　　$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$（取正）　　$\therefore x = 1 + \sqrt{2}$

此矩形長邊：短邊的比值＝$(1+\sqrt{2}) \div 1 = \sqrt{2} + 1$

而短邊：長邊的比值＝$\sqrt{2}-1$

正好是前面計算求得的答案。

(三)若可以連續去除掉三個最大的正方形後，剩下的矩形與本身相似，有這樣的矩形嗎？



$x:1=1:(x-3)$

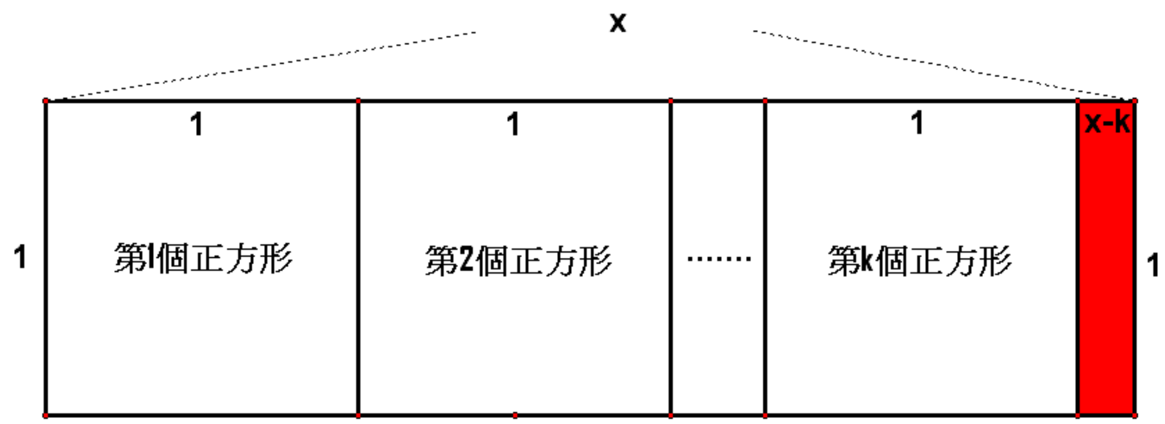
$x^2-3x-1=0$　　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ （取正）　　　$\therefore x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

此矩形長邊：短邊的比值＝$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$

而短邊：長邊的比值＝$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

亦與前面的計算相同。

（四）一般化，若連續去除掉 k 個正方形（K 為自然數），而剩下的矩形與本身相似，其邊長比如何呢？



$\mathrm{x}:1=1:(\mathrm{x}-\mathrm{k})$

$x^2-kx-1=0$　　　$x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$ （取正）　　　$\therefore x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

此矩形的長邊：短邊的比值為$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$；而短邊：長邊的比值為$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

（五）K 金矩形的意義：我們將這種特殊的矩形做一個定義

若一個矩形，可以連續去除掉 K 個最大的正方形，而剩下的矩形相似於其本身的話，這樣的矩形，我們就稱為 K 金矩形。(若 K=1 時，就是黃金矩形)

(六)由上面的討論，可知 K 金矩形的邊長比和它的倒數一定是具有小數點後面的每一個對應的數字都完全一模一樣的一對無理數。

三、探討如何利用尺規作圖作出 K 金矩形：

【研究過程說明】若設 K 金矩形的長邊為 a，短邊為 b，

由前面的過程可得 a：b 的比值為 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

而 b：a 的比值為 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

所以 $a=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$　　而 $b=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$

當 K 為已知的自然數時，

若給定短邊 b，則可由 $a=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$，用尺規作圖做出 a 的長度，因此可得到此 K 金矩形；

反之，若給定長邊 a，則亦可由 $b=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$，用尺規作圖做出 b 的長度，因此可得到此 K 金矩形。

(一)以 K=3 為例，如下圖，

已知：b 為 K=3 的 K 金矩形的短邊，試用尺規作圖做出此 K 金矩形。

分析：由前面的計算，可得 $a=\dfrac{\sqrt{3^2+4}+3}{2}\times b=\dfrac{\sqrt{3^2+2^2}+3}{2}\times b$

作法：

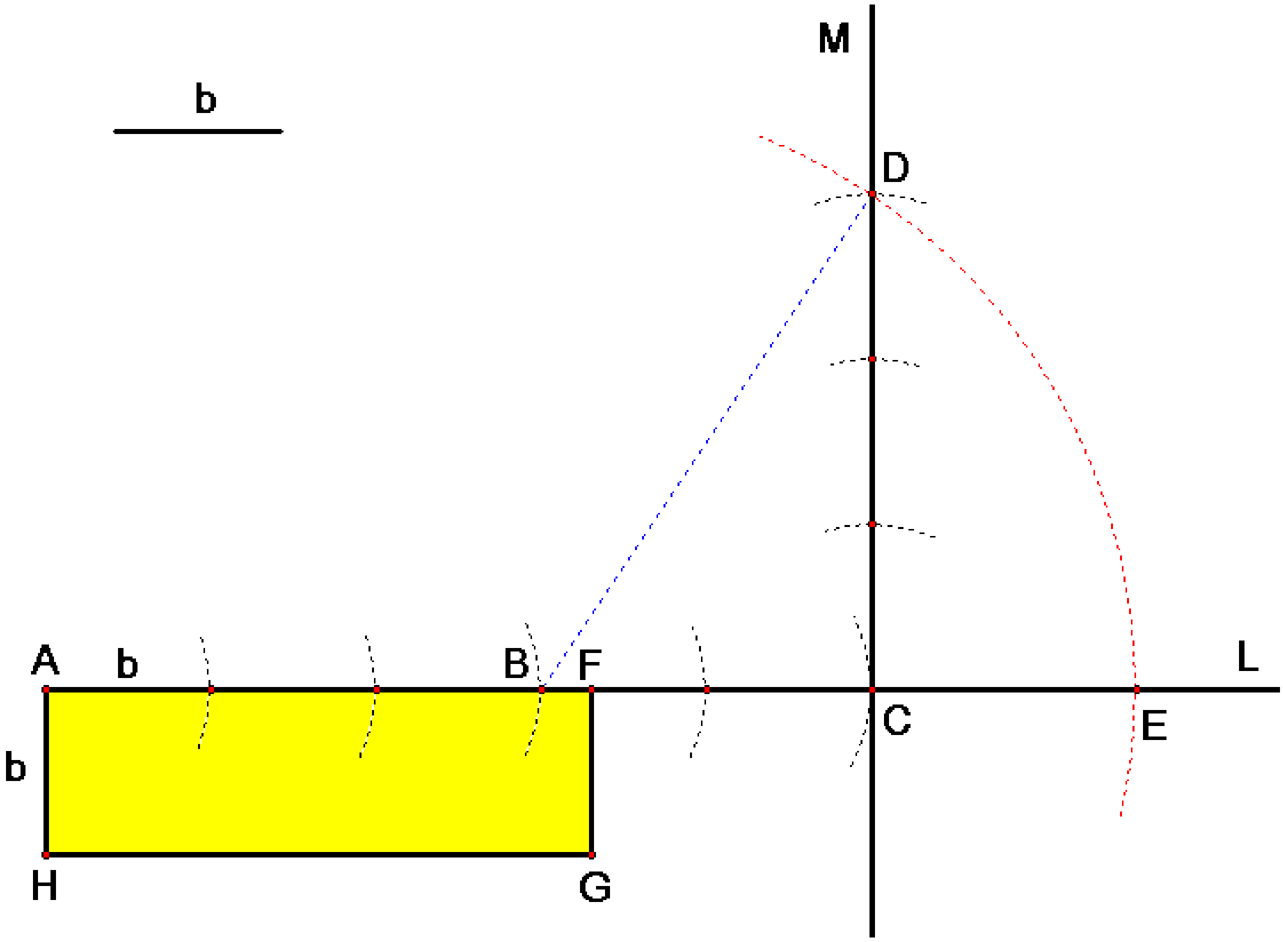
1. 作直線 L，並取 A、B、C 三點，使 $\overline{AB}=3b$ 、$\overline{BC}=2b$

2. 過 C 作直線 M⊥L，並取 D 點，使 $\overline{CD}=3b$

3. 在 L 上取 E 點，使 $\overline{BE}=\overline{BD}$

4. 作 $\overline{AE}$ 的中點 F

5. 以 $\overline{AF}$ 和 b 分別為矩形的長邊和短邊，做矩形 AFGH 即為所求。



（二）以 K=3 為例，如下圖，

若已知 a 為 K=3 的 K 金矩形的長邊，試用尺規作圖做出此 K 金矩形。

分析：由前面的計算，可得$b=\dfrac{\sqrt{3^2+4}-3}{2}\times a=\dfrac{\sqrt{3^2+2^2}-3}{2}\times a$

作法：

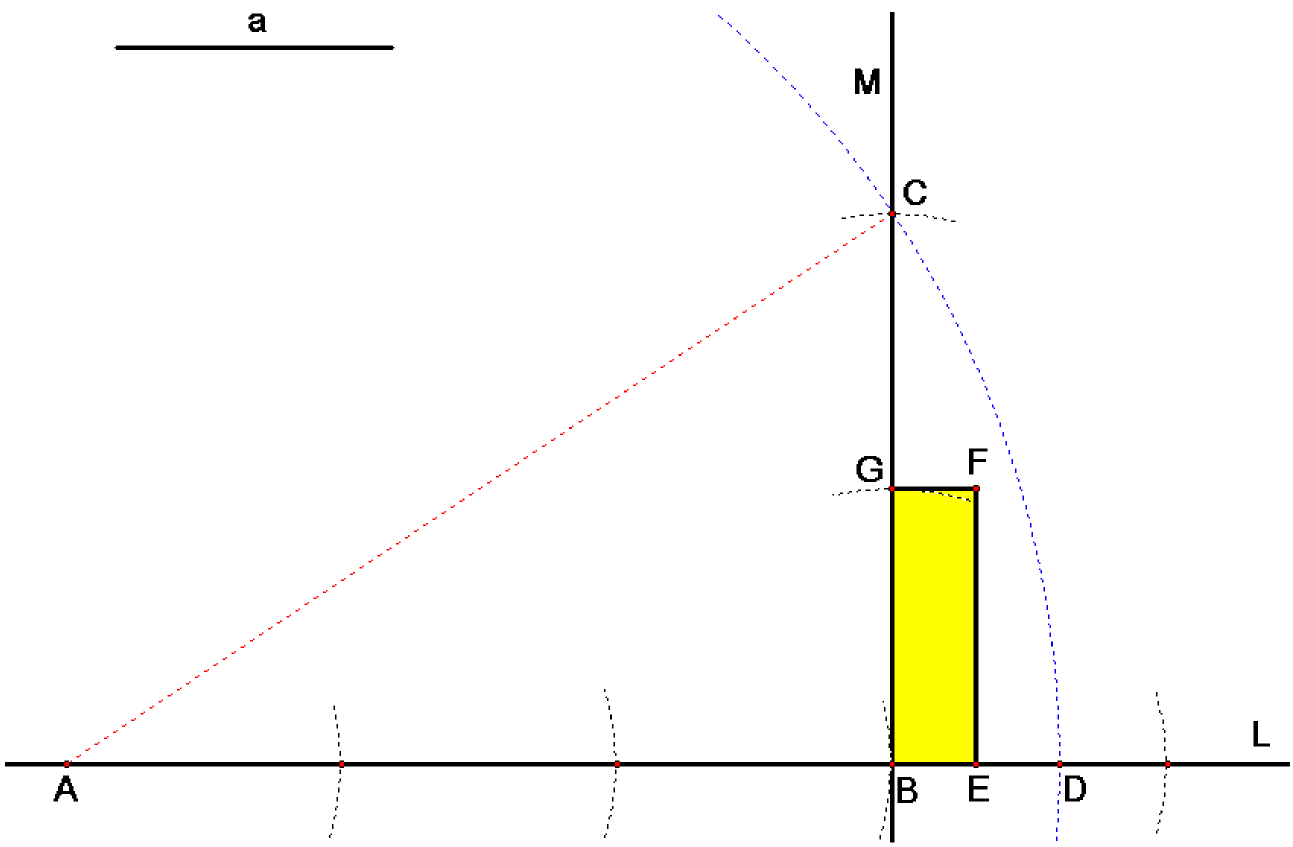
1. 作直線 L，並取 A、B 兩點，使$\overline{AB}=3b$

2. 過 B 作直線 M⊥L，並取 C 點，使$\overline{BC}=2b$

3. 在 L 上取 D 點，使$\overline{AD}=\overline{AC}$

4. 作$\overline{BD}$的中點 E

5. 以 a 和$\overline{BE}$分別為矩形的長邊和短邊，做矩形 BEFG 即為所求。



【問題】如果知道 k，求出 K 金矩形的長邊和短邊的關係式，再做圖並不難，可是有沒有一般的方法呢?

（三）研究一般的情形：

1. 若給定短邊 b：

$$\because a=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$$

$$\therefore a=\frac{k}{2}b+\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\times b=\frac{1}{2}(kb)+\frac{1}{2}\times\sqrt{k^2+4}\times b$$

$$=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2})^2k^2+(\frac{1}{2})^2\times 4}\times b$$

$$=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+(\frac{1}{2}\times 2\times b)^2}=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+b^2}$$

所以可以用這樣的關係式作出一般的 K 金矩形。

作法：

（1）作直線 L，並取 A、B 兩點，使 $\overline{AB}=b$

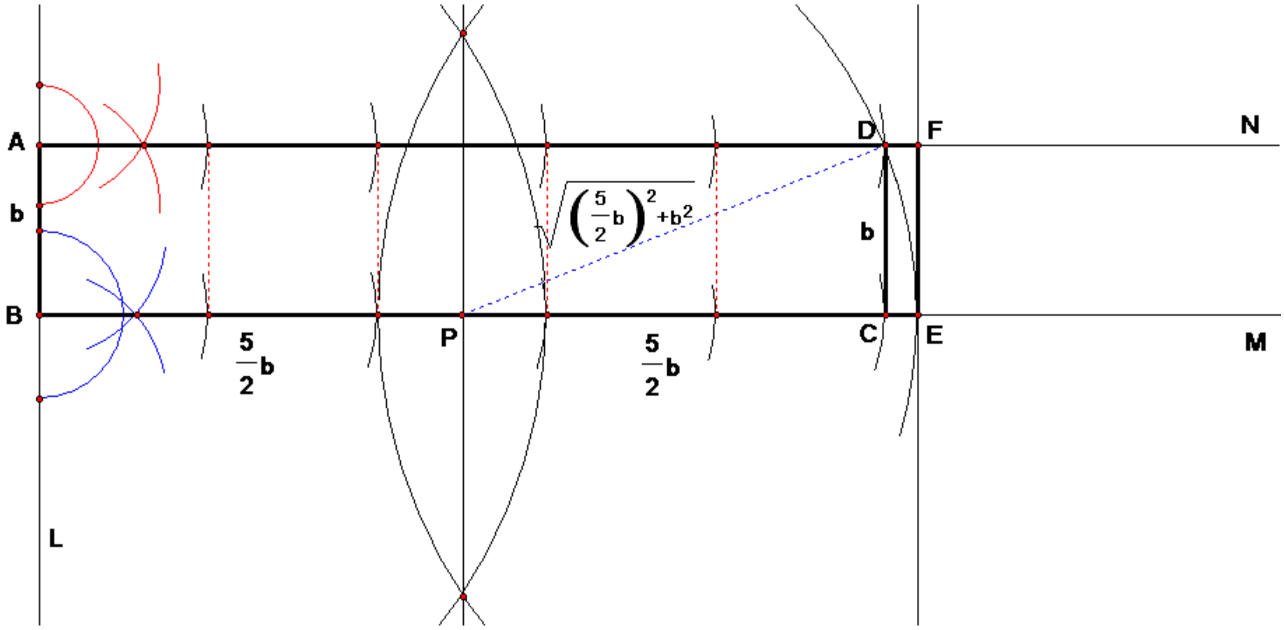
（2）分別過 A、B 作直線 N、M⊥L，

（3）分別在直線 N、M 上取 D、C 點，使 $\overline{AD}=\overline{BC}=kb$（註：下圖以 k=5 為例做圖）

（4）作 $\overline{BC}$ 的中點 P，並在直線 M 上取 E 點，使 $\overline{PE}=\overline{PD}$

（5）過 E 作 $\overline{EF}\perp$ 直線 N 於 F 點

（6）則矩形 ABEF 即為所求。



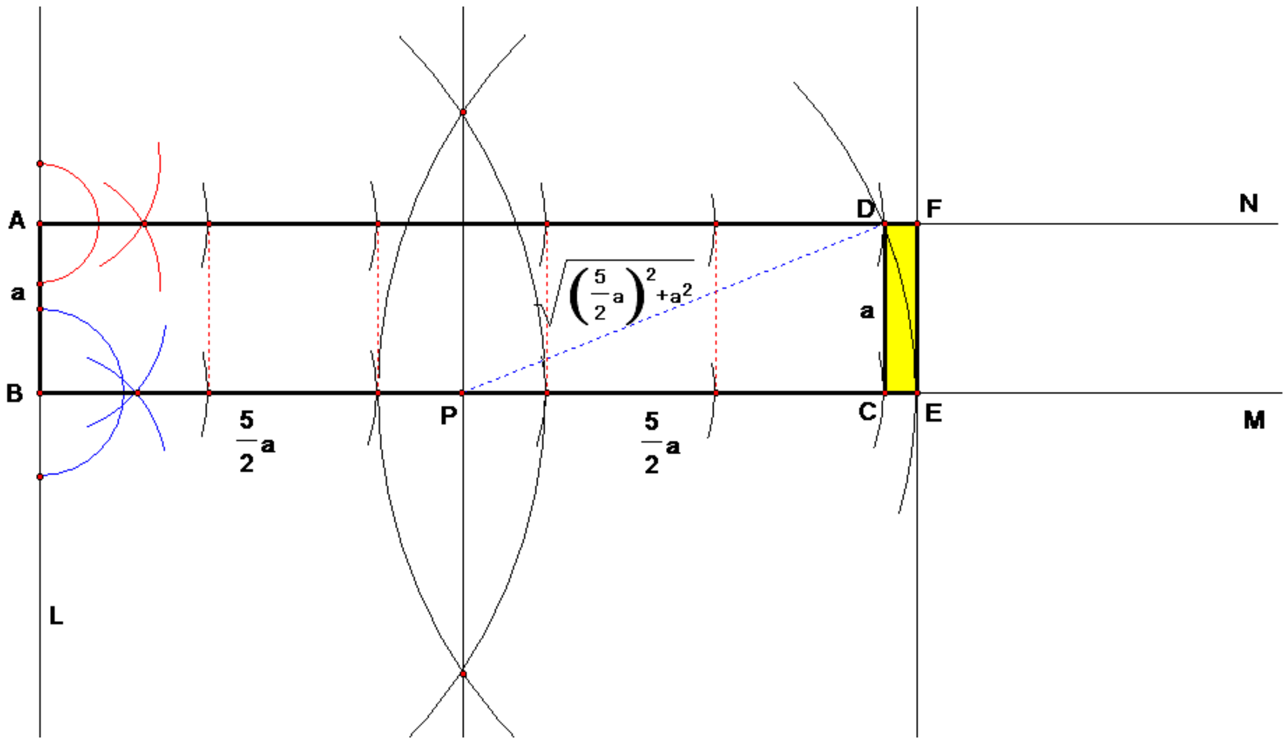
2. 若給定長邊 a：

因為 $b=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$

所以可推得 $b=\sqrt{(\frac{1}{2}ka)^2+a^2}-\frac{1}{2}(ka)$

【作法】將上圖中的 b 改為 a，

則矩形 CDFE 即為所求。如下圖



四、探討K金矩形邊長的比值與繁分數和無窮根式的關係：

（一）黃金比例與繁分數和無窮根式：(前人已研究)

黃金矩形長邊：短邊的比值為$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

此數（$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$）可以表示成繁分數$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$

過程如下：

$\because 1<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}<2$

$\therefore \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1+(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-1)=1+(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})=1+\cfrac{1}{(\cfrac{2}{\sqrt{5}-1})}$　，將$\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$分母有理化

$=1+\cfrac{1}{(\cfrac{\sqrt{5}+1}{2})}$　注意：分母與原來的數一樣

$=\cdots\cdots$（繼續下去即得）

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$$

把整數1減掉就是短邊：長邊的比值，也就是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

即$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$

另外$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$也可以表示成無窮根式$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

（二）探討K=2的K金矩形的邊長比如何表示成繁分數及無窮根式：

1、K=2的K金矩形的邊長比分別為$\sqrt{2}+1$和$\sqrt{2}-1$，表為繁分數的探討過程如下：

（1）因為 $2<\sqrt{2}+1<3$

所以 $\sqrt{2}+1=2+[(\sqrt{2}+1)-2]=2+(\sqrt{2}-1)=2+\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)}}$

$\because \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

$\therefore$ 原式 $=2+\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}$ 　　注意：分母與原來的數一樣

$=2+\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$

$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$

$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}}$ 　　注意：分母與原來的數一樣

$=$……（繼續下去）$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

（2）將整數 2 減去，就得到 $\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$

（3）反過來說：若 $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

則 $x=2+\dfrac{1}{x}$ 　　$\Rightarrow x^2=2x+1$ 　　$\Rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2\times 1}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正） 　　所以 $x=1+\sqrt{2}$

2、探討 K＝2 的 K 金矩形的邊長比如何表示成無窮根式：

（1）將 $\sqrt{2}+1$ 表示成無窮根式：

Ⅰ、原本想參考前人的成果：

因為$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$表示成無窮根式為$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$

所以我們猜$\sqrt{2}+1$表示成無窮根式的答案應該是

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$，對嗎?

[驗證]：令$y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$　　兩邊平方：

$\Rightarrow y^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\ldots\ldots}}}}$

$\Rightarrow y^2=2+y$　　$\Rightarrow y^2-y-2=0$　　$\Rightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\times1}=-1 or 2$

沒有一根為$\sqrt{2}+1$

所以事情沒我們想得簡單

在經過討論之後，我們有了以下的想法———

Ⅱ、我們採用逆向思考的方式：

若$y=\sqrt{2}+1$　　則$y-1=\sqrt{2}$

$\Rightarrow (y-1)^2=2$　　$\Rightarrow y^2-2y-1=0$

因此$\sqrt{2}+1$為$y^2-2y-1=0$之正根

$\therefore y^2=2y+1$

$\Rightarrow y=\sqrt{1+2y}$

$\Rightarrow$y 應該為$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

也就是$\sqrt{2}+1$可寫成無窮根式$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

Ⅲ、【證明】

若$y=\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

兩邊平方：$y^2=1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

所以$y^2=1+2y$　　$\Rightarrow y^2-2y-1=0$

$\Rightarrow y=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）　　所以$y=\sqrt{2}+1$

（2）同理可得$\sqrt{2}-1$可寫成無窮根式$\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

【證明】若$z=\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

兩邊平方：$z^2=1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

所以$z^2=1-2z$ $\Rightarrow z^2+2z-1=0$

$\Rightarrow z=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$（取正） 所以$z=\sqrt{2}-1$

（三）探討K＝3的K金矩形的邊長比如何表示成繁分數及無窮根式：

K＝3的K金矩形的邊長比，分別為$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$和$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

1、將$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$、$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$表示成繁分數，探討過程如下：

$\because 3<\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}<4$，整數部分為3

$\therefore \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}=3+(\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}-3)=3+(\dfrac{\sqrt{13}-3}{2})$，（此時$0<\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}<1$）

$=3+\dfrac{1}{(\dfrac{2}{\sqrt{13}-3})}$，將$\dfrac{2}{\sqrt{13}-3}$分母有理化

$=3+\dfrac{1}{(\dfrac{\sqrt{13}+3}{2})}$ 注意：分母與原來的數一樣

$=3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{(\dfrac{\sqrt{13}+3}{2})}}$ ＝……（繼續下去）

最後得到：$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}=3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\cdots\cdots}}}$

而$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$

【證明】參考前面證明

2、將$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$、$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$化成無窮根式：探討過程如下

令 $x=\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$， 則 $2x=\sqrt{13}+3$ ，$2x-3=\sqrt{13}$

兩邊平方：$(2x-3)^2=13$ ，$4x^2-12x+9=13$ $\Rightarrow x^2=3x+1$

所以 $\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ 為 $x^2=3x+1$ 之正根 $\Rightarrow x=\sqrt{1+3x}$ 可推測

$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ 化成無窮根式為 $\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

同理可得 $\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{\ldots\ldots}}}}$

【證明】參考前面證明

（四）一般化：若 K 為自然數

則 K 金矩形之邊長比分別為 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$ 。

1、將 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$ 化成繁分數：

由前面的探討可得，k＜$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$＜k+1

所以 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}=k+\left(\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}-k\right)=k+\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

$=k+\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{k^2+4}-k}\right)}$ ，將 $\dfrac{2}{\sqrt{k^2+4}-k}$ 分母有理化

$=k+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}}$ 注意：分母與原來的數一樣

持續下去，最後得到：

$$\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}=k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\ldots\ldots}}}$$

而 $$\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}=\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\ldots\ldots}}}}$$

2、將 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$ 化成無窮根式：

令 $x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ $\Rightarrow 2x-k=\sqrt{k^2+4}$

兩邊平方得：$(2x-k)^2=k^2+4$， $4x^2-4kx+k^2=k^2+4$

$4x^2 = 4kx + 4$　　兩邊同除以 4： $x^2 = 1 + kx$

因此 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ 為一元二次方程式 $x^2 = 1 + kx$ 之正根　　$\Rightarrow x = \sqrt{1+kx}$

可推測得 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2} = \sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

同理可得： $\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2} = \sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

五、探討 K 金矩形邊長比值與費氏數列的關係：

（一）黃金比例與費氏數列（前人已研究）

1、文獻上記載，費波那奇由一個稱為「兔子問題」的題目得到了一個很特別的數列：此數列的 $a_1 = 1$

$a_2 = 1$

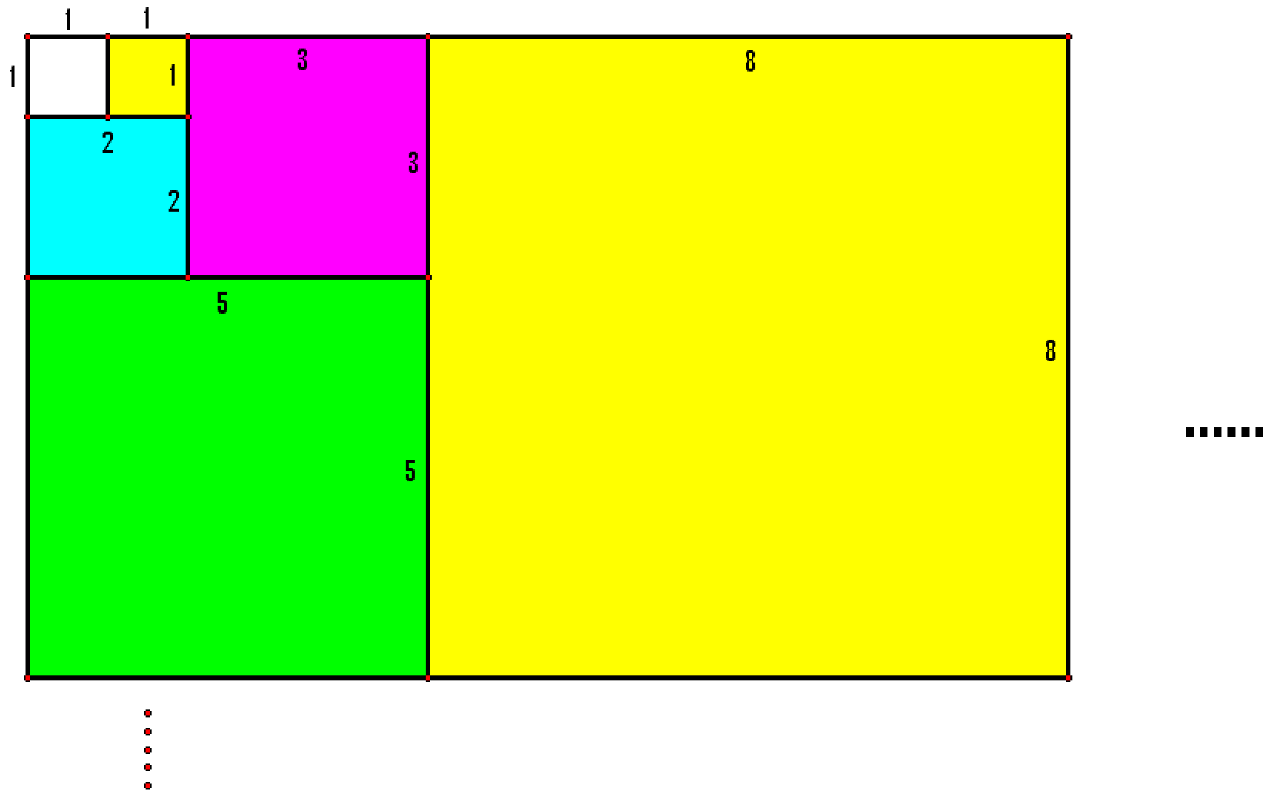
$a_3 = a_1 + a_2 = 2$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$　　……

對於任意自然數 n， $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

2、再經後人研究，已證得，當 n→∞時，費氏數列的 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（黃金比）

3、以上的結果可以下圖表示：



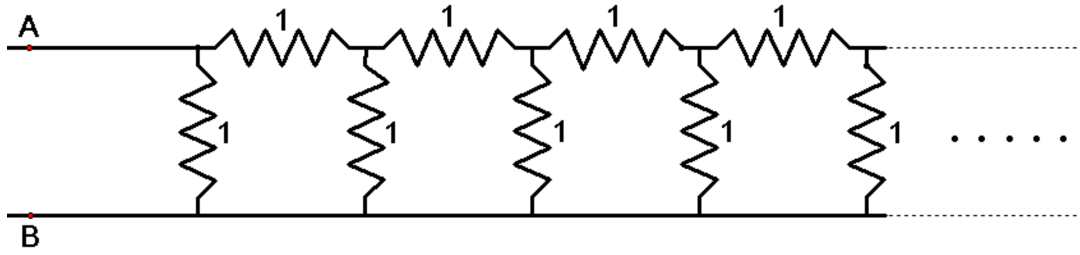
上圖表示，越後面所得矩形的長邊:短邊的比值會越接近黃金比（$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$）

且此矩形的長邊與短邊正好為費氏數列的 a_{n+1} 和 a_n 。

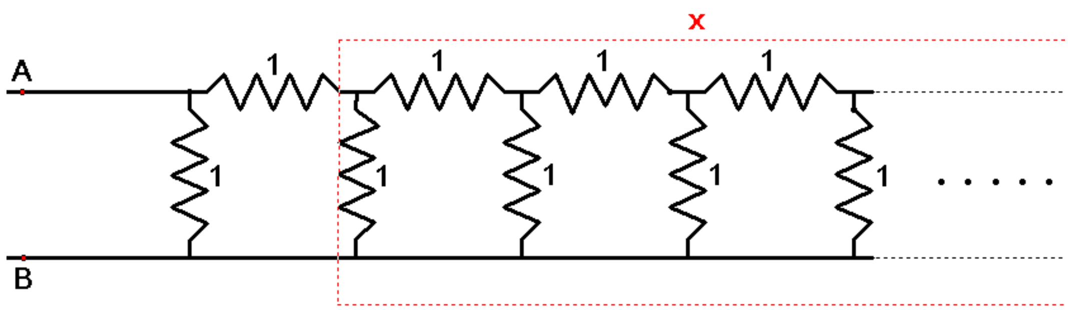
（二）K 金矩形的邊長比例和數列的關係：

1. 用「排無窮電阻」的方法得到費氏數列：

剛好在我們研究這個題目的期間，老師要我們做高中資優班的考試題目，原題目如下：「如圖，下面的電路圖表示了一個由無限多個1Ω電阻所組成的電路，圖中右邊的虛線，表示不斷重複左邊的裝置，直到無窮無盡。請問 A、B 之間的總電阻為多少Ω？」



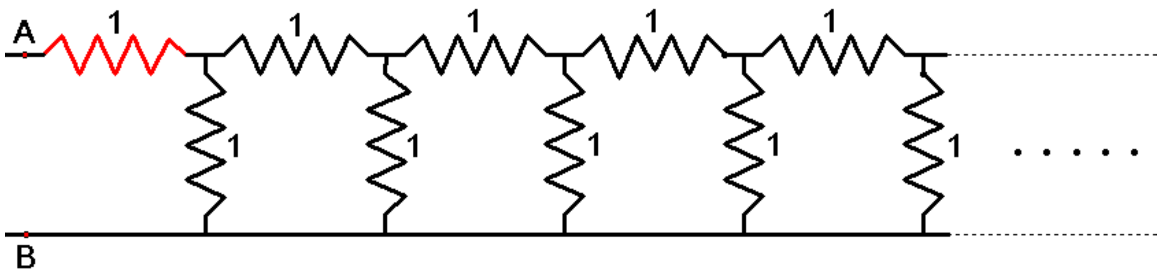
<解>因為題目是一個無窮多個電阻的電路圖，因此我們可以說除了左邊的 2 個電阻之外，其他的部份所得到的電阻實際上和整體的總電阻完全相同的，若假設總電阻為$x\Omega$，利用電阻串、並聯的計算原則，可列出以下的方程式：(以下圖表示)



$$\frac{1}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1}}=x \qquad \Rightarrow \frac{1}{\frac{1+(x+1)}{x+1}}=x \qquad \Rightarrow \frac{x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2+2x=x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-1=0 \qquad \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ \text{（取正）} \qquad \text{所以總電阻為}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Omega$$

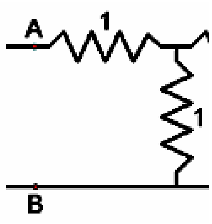
原題解出來的答案，引起了我們的注意。因為本研究知道$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以如果我們將題目的圖的左邊串聯一個$1\Omega$的電阻，利用電阻串、並聯的計算原則，可知最後的總電阻為$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\Omega)$＝黃金比，以下圖表示：



另外我們也知道電阻不可能無窮無盡地排下去，但是如果我們從左邊的部份一段一段

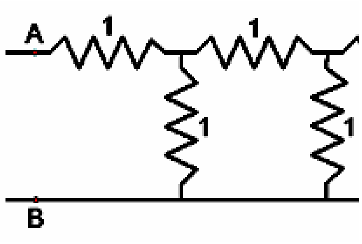
排，實際上 A、B 之間的電阻還是可以算得出來，例如：

（1）



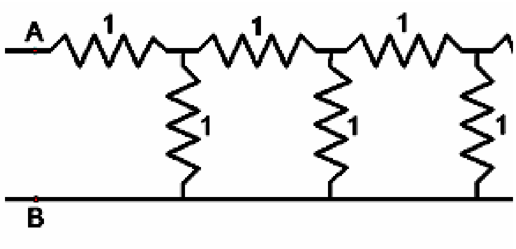
的電阻為 1＋1＝2（相當於串聯），

（2）



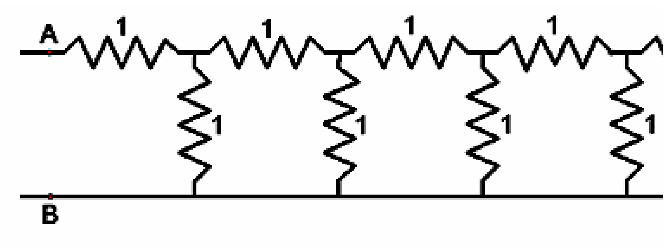
的電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{3}{2}}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

（3）



的電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{8}{5}}+1=1\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$

（4）



的電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{13}{8}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{21}{13}}+1=1\frac{13}{21}=\frac{34}{21}$　　　　依此類推…………

將出現的每階段電阻列出來，2（$=\frac{2}{1}$）、$\frac{5}{3}$、$\frac{13}{8}$、$\frac{34}{21}$、…………，

發現正好是費氏數列中後項：前項的比值，推論如下：

我們知道前面都是對的，再因為

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}+1}+1=\frac{1}{\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}}}+1=\frac{a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}+1$$

（因為在費氏數列中 $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$）

$$=\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+1=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_{n+2}}$$（因為在費氏數列中 $a_{n+1}+a_{n+2}=a_{n+3}$）

$$=\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$$（也是費氏數列中後項：前項的比值）

因此，我們認為利用「排電阻」的方法可以得到 K 金矩形邊長比的比值所對應的數列，就如同黃金矩形對應於費氏數列這樣地完美。

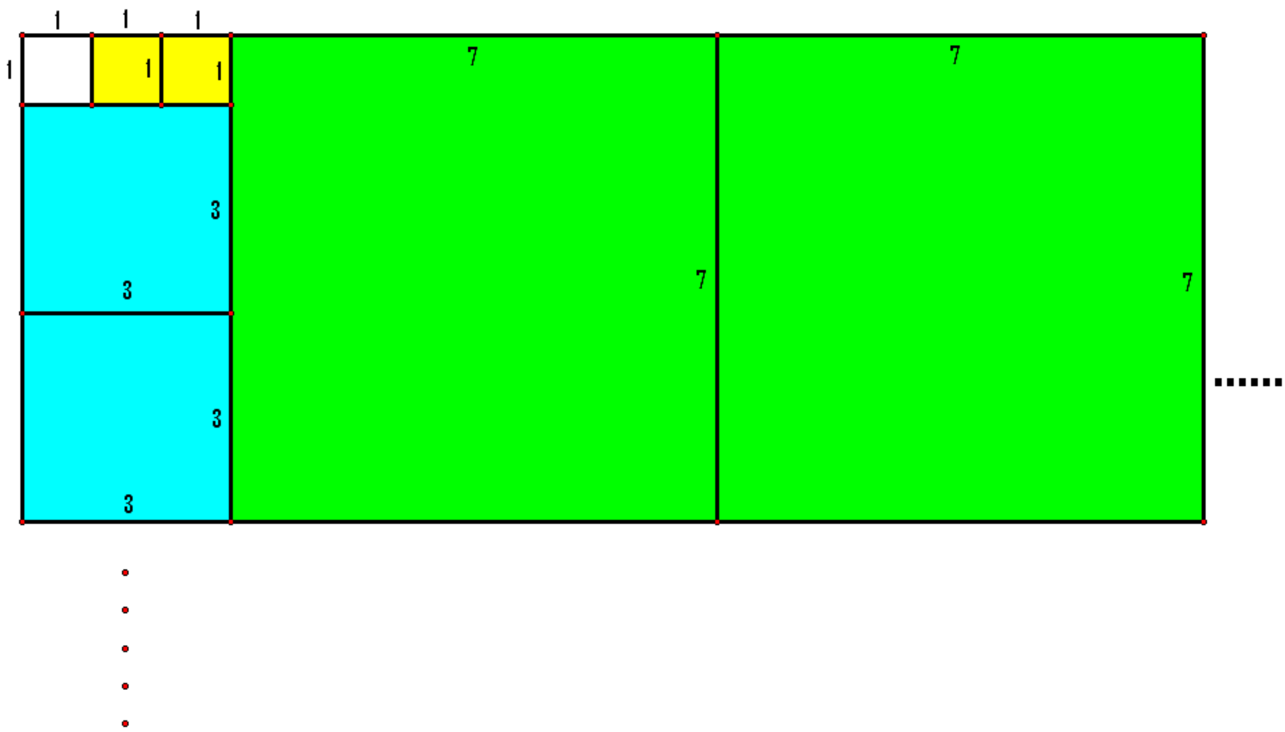
在「研究討論」中有詳細探討。

2、利用「排正方形」的方法得到 K 金矩形邊長比所對應的數列：

在參考文獻上的圖形後，我們覺得可以把上面的圖形（參考第 17 頁的圖）應用到 K 金矩形上：

（1）先研究 K＝2 的情形：

如下圖，先排一個邊長為 1 的正方形，
向右邊連續排 2 個邊長為 1 的正方形，形成一個 3x1 的矩形，
在此矩形下方再連續排 2 個邊長為 3 的正方形，形成一個 3x7 的矩形，
在此矩形右邊再連續排 2 個邊長為 7 的正方形，形成一個 17x7 的矩形，
如此繼續下去…………



【說明】依次將出現的「正方形的邊長」記錄如下：1，1，3，7，17，……

得數列如下：（n 為自然數）

$a_1=1$

$a_2 = 1$

$a_3 = a_1 + 2a_2 = 3$

$a_4 = a_2 + 2a_3 = 7$ ，

$a_5 = a_3 + 2a_4 = 17$

對於任意自然數 n： $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$

先用 Excel 試算表算看看，下表中，我們設定 Excel 試算表讓它的儲存格符合：「 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 1$ ，對於任意自然數 n， $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$ 」，讓它計算此數列的前 30 項，然後再讓它計算 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的值，經過 Excel 試算表的計算，發現當 n 變大時，此數列的 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 會漸漸穩定下來，接近 $\sqrt{2}+1$ 的近似值。

k=2		
n	a(n)	a(n)/a(n−1)
1	1	
2	1	
3	3	3.00000000000000
4	7	2.33333333333333
5	17	2.42857142857143
6	41	2.41176470588235
7	99	2.41463414634146
8	239	2.41414141414141
9	577	2.41422594142259
10	1393	2.41421143847487
11	3363	2.41421392677674
12	8119	2.41421349985132
13	19601	2.41421357310014
14	47321	2.41421356053263
15	114243	2.41421356268887
16	275807	2.41421356231892
17	665857	2.41421356238239
18	1607521	2.41421356237150
19	3880899	2.41421356237337
20	9369319	2.41421356237305
21	22619537	2.41421356237310
22	54608393	2.41421356237309
23	131836323	2.41421356237310
24	318281039	2.41421356237309
25	768398401	2.41421356237309

26	1855077841	2.41421356237309
27	4478554083	2.41421356237309
28	10812186007	2.41421356237309
29	26102926097	2.41421356237309
30	63018038201	2.41421356237309

可是這個數列的一般項 a_n =？，另外為什麼當 n→∞時，此數列的 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \sqrt{2}+1$ 呢

在查閱相關資料後，發現這個數列就是一種所謂「遞迴數列」，探討如下：

Ⅰ、因為 $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$（n 為自然數）

先找出兩個數 α 、β 使得 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

展開得 $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

與原式比較，得 $\begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha$ ，β 為 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 之兩根（即 $x = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$ ）

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1+\sqrt{2} \\ \beta = 1-\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha = 1-\sqrt{2} \\ \beta = 1+\sqrt{2} \end{cases}$

Ⅱ、因為 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

n=1 代入：$a_3 - \alpha a_2 = \beta(a_2 - \alpha a_1)$………第（1）式

n=2 代入：$a_4 - \alpha a_3 = \beta(a_3 - \alpha a_2)$………第（2）式

……

n－2 代入：$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$………第（n－2）式

n－1 代入：$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})$………第（n－1）式

第 1x2x…x（n－2）x（n－1）式

得到： $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$………（＊）

將 α 、β 互換：$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$………（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha-\beta)a_n = (a_2 - \beta a_1)\times\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1} - \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、取 $\begin{cases} \alpha = 1+\sqrt{2} \\ \beta = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

計算 $\frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha-\beta} = \frac{1-(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha-\beta} = \frac{1-(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

所以 $\boxed{a_n = \frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n-1}}$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n}}$$

Ⅳ、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n}}{\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n-1}}$ 　　分子、分母各約掉$\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n}+(1-\sqrt{2})^{n}}{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}}$ 　　分子、分母同除以$(1+\sqrt{2})^{n-1}$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}}{1+(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}}$$

因為$-1<\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}<0$，所以當 n→∞時，$(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}\to 0$

因此，當 n→∞時，此數列的$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to 1+\sqrt{2}$

（2）再研究 K＝3 的情形：

如下圖，先排一個邊長為 1 的正方形，

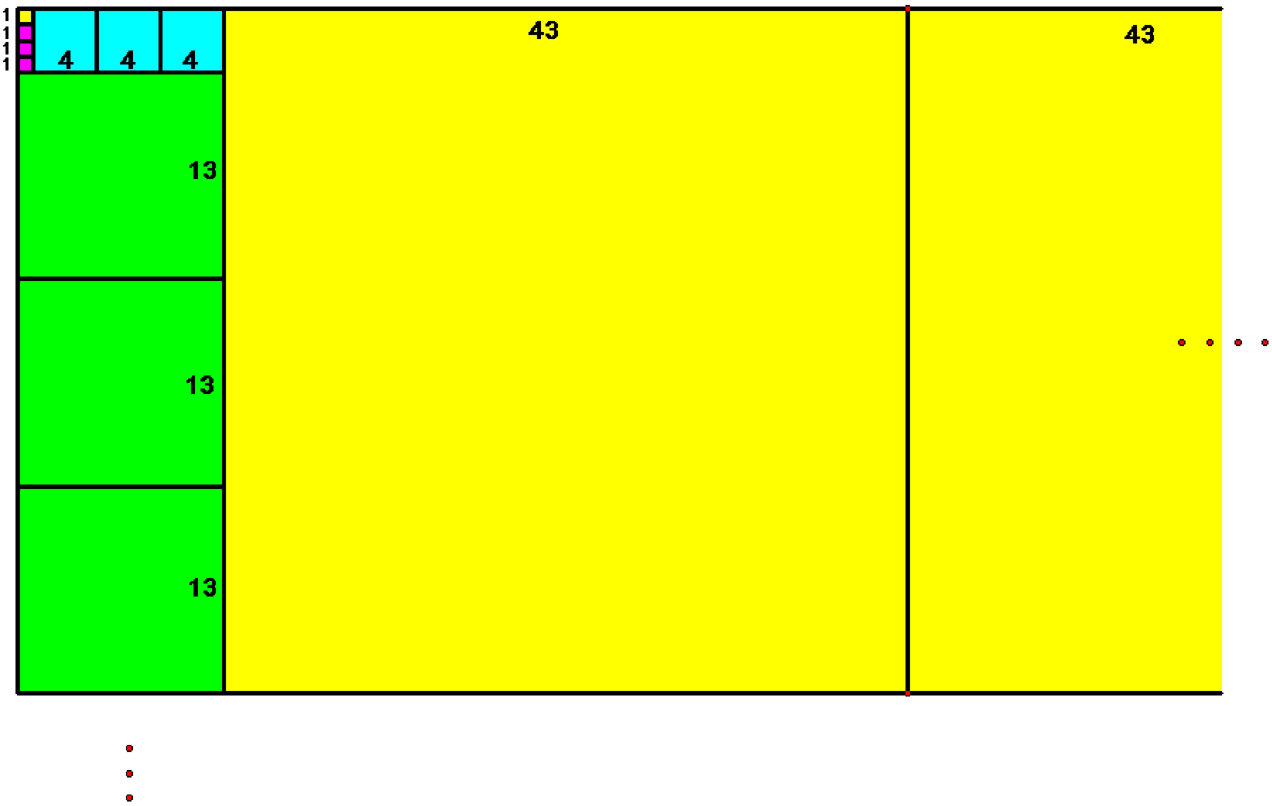
向下方連續排 3 個邊長為 1 的正方形，形成一個 1×4 的矩形，

在此矩形右邊再連續排 3 個邊長為 4 的正方形，形成一個 13×4 的矩形，

在此矩形下方再連續排 3 個邊長為 13 的正方形，形成一個 13×43 的矩形，

在此矩形右邊再連續排 3 個邊長為 43 的正方形，形成一個 142×43 的矩形，

如此繼續下去…………



【說明】依次將出現的正方形的邊長紀錄如下：1，1，4，13，43，……

得數列如下：(n 為自然數)

$a_1=1$

$a_2=1$

$a_3=a_1+3a_2=4$

$a_4=a_2+3a_3=13$，

$a_5=a_3+3a_4=43$

對於任意自然數 n：$a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$

也是先用 Excel 試算表算看看，下表中，我們設定 Excel 試算表讓它的儲存格符合：「$a_1=1$，$a_2=1$，對於任意自然數 n，$a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$」，讓它計算此數列的前 30 項，然後再讓它計算 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的值，經過 Excel 試算表的計算，

發現當 n 變大時，此數列的 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 會漸漸穩定下來，接近 $\frac{\sqrt{13}+3}{2}$ 的近似值。

k=3		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1	
2	1	
3	4	4.00000000000000
4	13	3.25000000000000
5	43	3.30769230769231

6	142	3.30232558139535
7	469	3.30281690140845
8	1549	3.30277185501066
9	5116	3.30277598450613
10	16897	3.30277560594214
11	55807	3.30277564064627
12	184318	3.30277563746483
13	608761	3.30277563775649
14	2010601	3.30277563772975
15	6640564	3.30277563773220
16	21932293	3.30277563773198
17	72437443	3.30277563773200
18	239244622	3.30277563773199
19	790171309	3.30277563773199
20	2609758549	3.30277563773199
21	8619446956	3.30277563773199
22	28468099417	3.30277563773199
23	94023745207	3.30277563773199
24	310539335038	3.30277563773199
25	1025641750321	3.30277563773199
26	3387464586001	3.30277563773199
27	11188035508324	3.30277563773199
28	36951571110973	3.30277563773199
29	122042748841243	3.30277563773199
30	403079817634702	3.30277563773199

再利用「遞迴數列」，探討如下：

Ⅰ、因為 $a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$（n 為自然數）

先找出兩個數 α 、β 使得 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

展開得 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

與原式比較，得 $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha$，$\beta$ 為 $x^2-3x-1=0$ 之兩根（即 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$）

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ \beta=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Ⅱ、因為 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

n＝1 代入：$a_3-\alpha a_2=\beta(a_2-\alpha a_1)$………第（1）式

n＝2 代入：$a_4-\alpha a_3=\beta(a_3-\alpha a_2)$………第（2）式

……

n－2 代入：$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$………第（n－2）式

n－1 代入：$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})$………第（n－1）式

第 1×2×⋯×（n－2）×（n－1）式

得到：　　　　$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$………（＊）

將α、β互換：$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)$………（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha - \beta)a_n = (a_2 - \beta a_1)\times\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta}\alpha^{n-1} - \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、令$\begin{cases}\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \beta = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

化簡：$\dfrac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} = \dfrac{1-\beta}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta} = \dfrac{1-\alpha}{\sqrt{13}}$

所以$\boxed{a_n = \dfrac{1-\beta}{\sqrt{13}}\cdot\alpha^{n-1} - \dfrac{1-\alpha}{\sqrt{13}}\cdot\beta^{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$

$\rightarrow\boxed{a_{n+1} = \dfrac{1-\beta}{\sqrt{13}}\cdot\alpha^{n} - \dfrac{1-\alpha}{\sqrt{13}}\cdot\beta^{n} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}$

Ⅳ、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}{\dfrac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$　　分子、分母各約掉$\dfrac{1}{\sqrt{13}}$：

$= \dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha^{n} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n}}{(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1} - (1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}}$　　分子、分母同除以α^{n-1}：

$= \dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha - (1-\alpha)\cdot\beta\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{(1-\beta) - (1-\alpha)\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}$

其中$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$，

顯然$-1 < \dfrac{\beta}{\alpha} < 0$，所以當 n→∞時，$(\dfrac{\beta}{\alpha})^{n-1} \rightarrow 0$

因此，當 n→∞時，此數列的$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha - 0}{(1-\beta) - 0} = \dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha}{(1-\beta)} = \alpha = \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$

（3）再研究一般K金矩形的情形：

先排一個邊長為1的正方形，

向下方連續排k個邊長為1的正方形，形成長為1、寬為(k+1)的矩形，

在此矩形右邊再連續排k個邊長為(k+1)的正方形，形成一個長為

（k^2+k+1）、寬為(k+1)的矩形，

在此矩形下方再連續排k個邊長為（k^2+k+1）的正方形，形成一個長為（k^2+k+1）、寬為（k^3+k^2+2k+1）的矩形，如此繼續下去…………

【說明】依次將出現的正方形的邊長紀錄如下：1，1，1+k，k^2+k+1，（k^3+k^2+2k+1），……

得數列如下：

$a_1=1$

$a_2=1$

$a_3=a_1+ka_2=1+k$

$a_4=a_2+ka_3=k^2+k+1$，

$a_5=a_3+ka_4=k^3+k^2+2k+1$

對於任意自然數n：$a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}$

利用「遞迴數列」，探討如下：

Ⅰ、因為$a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}$（n為自然數）

先找出兩個數α、β使得$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

展開得$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

與原式比較，得$\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha$，$\beta$為二次方程式$x^2-kx-1=0$之兩根

因為判別式：$(-k)^2-4\cdot1\cdot(-1)=k^2+4>0$

所以方程式$x^2-kx-1=0$有兩個相異根

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}$$

Ⅱ、因為$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

n＝1代入：$a_3-\alpha a_2=\beta(a_2-\alpha a_1)$………第（1）式

n＝2代入：$a_4-\alpha a_3=\beta(a_3-\alpha a_2)$………第（2）式

……

n－2代入：$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$………第（n－2）式

n－1代入：$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$………第（n－1）式

第1×2×…×（n－2）×（n－1）式

得到：　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$………（＊）

將α、β互換：$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$………（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\times\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、化簡得 $\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$

$$\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}=\frac{1-\alpha}{\alpha-\beta}$$

所以 $\boxed{a_n=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^{n-1}-\dfrac{1-\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\beta^{n-1}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$

$$\Rightarrow\boxed{a_{n+1}=\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^{n}-\frac{1-\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\beta^{n}=\frac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}$$

Ⅳ、取 $\begin{cases}\alpha=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}{\frac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$ 　　分子、分母各約掉 $\dfrac{1}{\alpha-\beta}$

$=\dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}}{(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}}$ 　　分子、分母同除以 α^{n-1}：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1-\beta)\cdot\alpha-(1-\alpha)\cdot\beta\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{(1-\beta)-(1-\alpha)\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}$$

其中 $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\mathrm{k}-\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}{\mathrm{k}+\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}$，當 n 為自然數時，$\dfrac{-\mathrm{k}-\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}{\mathrm{k}+\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}<\dfrac{\mathrm{k}-\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}{\mathrm{k}+\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}<0$

也就是 $-1<\dfrac{\beta}{\alpha}<0$，當 $n\to\infty$ 時，$(\dfrac{\beta}{\alpha})^{n-1}\to 0$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha-0}{(1-\beta)-0}=\alpha=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$

小結：若 k 為自然數，遞迴數列 $\begin{cases}a_1=1\\ a_2=1\\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}\end{cases}$ （n 為所有自然數）

此遞迴數列之後項：前項的比值 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值為 $\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ 。

伍、研究結果：

一、在連續兩個正整數 k 和 k+1 之間，都存在唯一的一個無理數，其與其倒數的差為整數（即小數點後的每一位對應的數字都相同）。其公式為 $\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$。

二、承一，若 $k<a<k+1$ 且 $a-\dfrac{1}{a}$ 為整數，則取 a 的相反數亦有相同的現象。

即 $(-a)-(-\dfrac{1}{a})$ 亦為整數。

三、K 金矩形的定義：若一個矩形，可以連續去除掉 K 個最大的正方形，而剩下的矩形相似於其本身的話，這樣的矩形，我們就稱為 K 金矩形。

（若 K=1 時，就是黃金矩形）

四、K 金矩形的邊長比值與繁分數、無窮根式及數列的關係，整理如下表：

若 a、b 分別為 K 金矩形的長邊和短邊，則

k＝2				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\dfrac{a}{b}$	$\sqrt{2}+1$	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\dfrac{b}{a}$	$\sqrt{2}-1$	$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值

k＝3				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$	$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$	$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值

k＝4				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\sqrt{5}+2$	$4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+4a_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\frac{b}{a}$	$\sqrt{5}-2$	$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-4\sqrt{1-4\sqrt{1-4\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+4a_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值

k＝5				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt{29}+5}{2}$	$5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+5\sqrt{1+5\sqrt{1+5\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+5a_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\frac{b}{a}$	$\frac{\sqrt{29}-5}{2}$	$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-5\sqrt{1-5\sqrt{1-5\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+5a_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值

一般的 k				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列

$\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$	$k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$的極限值
$\frac{b}{a}$	$\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$	$\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1} \end{cases}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}$的極限值

五、K 金矩形的尺規作圖：若 a、b 分別為 K 金矩形的長邊和短邊，則由關係式

$$a=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+b^2}\text{、}b=\sqrt{(\frac{1}{2}ka)^2+a^2}-\frac{1}{2}(ka)\text{，}$$

皆可由已知其中一個，求作另一個，而畫出此 K 金矩形。

陸、研究討論：

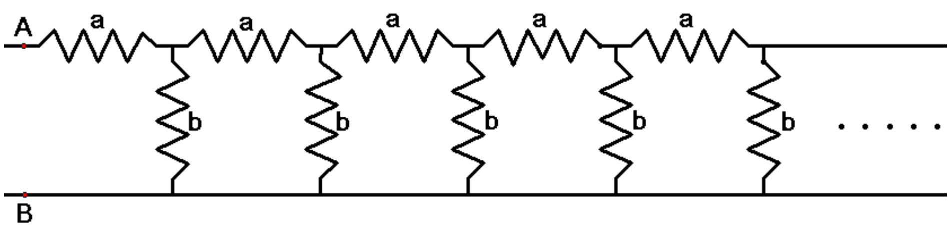
經過我們的討論，發現可以利用排電阻的方法得到 K 金矩形所對應的數列：說明如下

一、利用電阻的串、並聯，我們將設計一條無窮多個電阻的電路，求出一個數列使得其後項：前項的比值 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$，當 $n\to\infty$ 時，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to$（K 金矩形長邊：短邊的比值）。

方法如下：

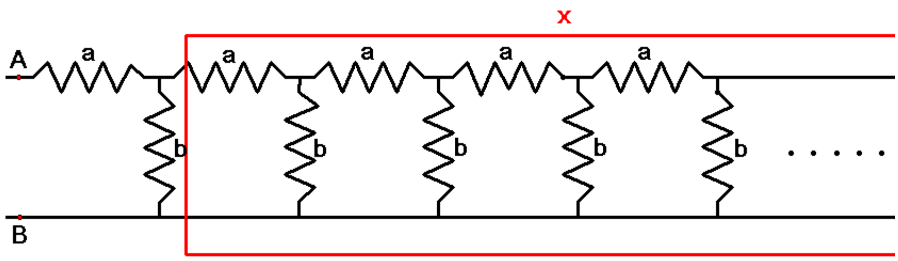
（一）以 k＝2 為例：

先假設其電路為下圖的型式：(a、b 為常數)



因為右邊的有無窮多個電阻，所以除了左邊的兩個電阻之外，右邊的電阻會等於總電阻，設總電阻為 x，利用電阻的串、並聯的計算原則，可得方程式：(如下圖)

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{b}}+a=x$$



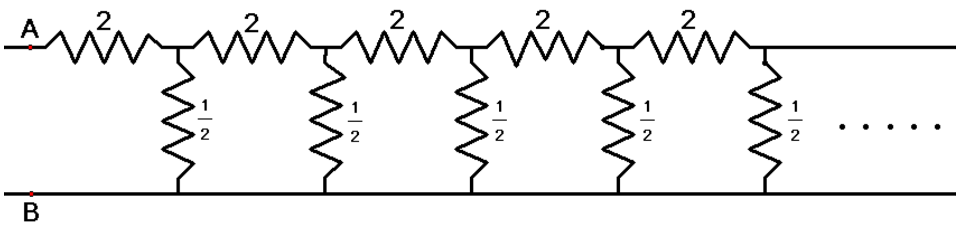
$\Rightarrow \dfrac{1}{\dfrac{b+x}{bx}}+a=x \qquad \Rightarrow \dfrac{bx}{x+b}=x-a \qquad \Rightarrow (x+b)(x-a)=bx$

$\Rightarrow x^2-ax+bx-ab=bx \qquad \Rightarrow x^2-ax-ab=0$

因為 k＝2 時，K 金矩形長邊：短邊的比值為$\sqrt{2}+1$，

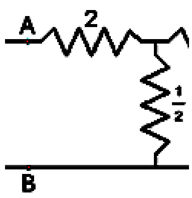
而$\sqrt{2}+1$為方程式$x^2-2x-1=0$之正根，

比較方程式$x^2-2x-1=0$和$x^2-ax-ab=0$的係數後得到 a＝2、b＝$\dfrac{1}{2}$，所以應該設計其電路為下圖的型式：



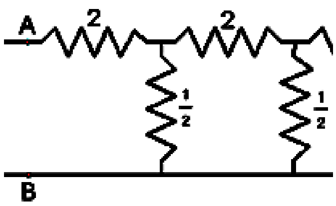
利用分段計算電阻可得：

1.



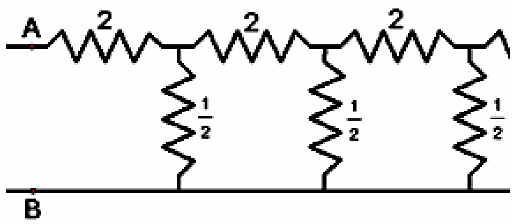
的電阻為 $2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

2.



的電阻為$\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{5}{2})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\dfrac{29}{12}$

3.



的電阻為 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{29}{12})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\dfrac{169}{70}$

依此類推…………

將出現的每階段電阻列出來：$\dfrac{5}{2}$、$\dfrac{29}{12}$、$\dfrac{169}{70}$、…………，

可得數列 2，5，12，29，70，169，…………，

令數列：$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ （n 為正整數）

我們將證明：依照上述規律排列電阻的電路圖中其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的下一個數為 $\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ 。

<pf>將 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 再往後算一步

$$\frac{1}{\dfrac{1}{(\frac{a_{n+1}}{a_n})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+2}+2=\frac{1}{\dfrac{a_n+2a_{n+1}}{a_{n+1}}}+2=\frac{a_{n+1}}{a_n+2a_{n+1}}+2$$

（因為在數列 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 中，$a_n+2a_{n+1}=a_{n+2}$）

原式 $=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+2=\dfrac{a_{n+1}+2a_{n+2}}{a_{n+2}}$

（因為在數列 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 中，$a_{n+1}+2a_{n+2}=a_{n+3}$）

所以原式 $=\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$

因此，我們得到 k＝2 的 K 金矩形，其對應的數列為 2，5，12，29，70，169，…………

即數列：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} \end{cases}$。

原本我們以為應該可以得到如同前面用正方形拼圖法所得到的數列：1，1，3，7，17，41……，即數列：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} \end{cases}$，可是卻得到數列 2，5，12，29，70，169，…，即數列：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} \end{cases}$

不過，利用「遞迴數列」的方法，仍然可以得到此數列$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} \end{cases}$，

當 $n \to \infty$ 時，其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \sqrt{2}+1$；而 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to \sqrt{2}-1$

也可以用 excel 算看看：

k=2		
n	a(n)	a(n)/a(n−1)
1	2	
2	5	
3	12	2.40000000000000
4	29	2.41666666666667
5	70	2.41379310344828
6	169	2.41428571428571
7	408	2.41420118343195
8	985	2.41421568627451
9	2378	2.41421319796954
10	5741	2.41421362489487
11	13860	2.41421355164605
12	33461	2.41421356421356
13	80782	2.41421356205732
14	195025	2.41421356242727
15	470832	2.41421356236380
16	1136689	2.41421356237469
17	2744210	2.41421356237282

18	6625109	2.41421356237314
19	15994428	2.41421356237309
20	38613965	2.41421356237310
21	93222358	2.41421356237309
22	225058681	2.41421356237309
23	543339720	2.41421356237309
24	1311738121	2.41421356237309
25	3166815962	2.41421356237309
26	7645370045	2.41421356237309
27	18457556052	2.41421356237309
28	44560482149	2.41421356237309
29	107578520350	2.41421356237309
30	259717522849	2.41421356237309

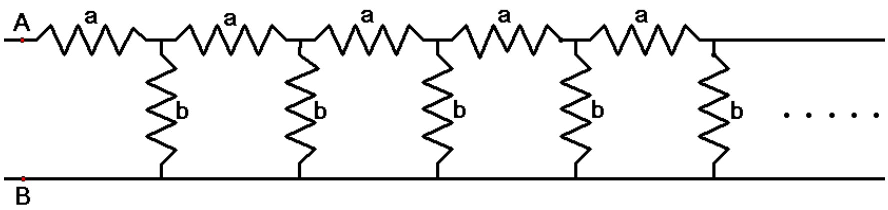
【心得】1. 雖然數列的每一項均不同，可是 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值卻可能相等，

另外將最左邊的電阻拿掉，其總電阻就等於 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值。

2. 但是對於一個特定的 k 值而言，如果比較「排正方形法」和「排無窮電阻法」所得到的兩個數列，「排無窮電阻法」所得到的數列其 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的會趨近得比較快。(比較表參閱附錄)

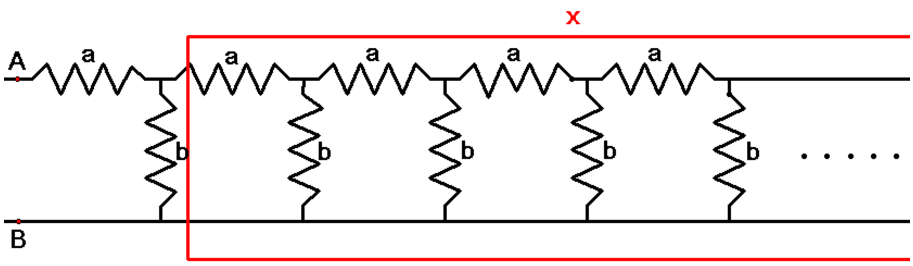
（二）以 k＝3 為例：

先假設其電路為下圖的型式：(a、b 為常數)



因為右邊的有無窮多個電阻，所以除了左邊的兩個電阻之外，右邊的電阻會等於總電阻，設總電阻為 x，利用電阻的串、並聯的計算原則，可得方程式：(如下圖)

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{b}}+a=x$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{b+x}{bx}}+a=x$$

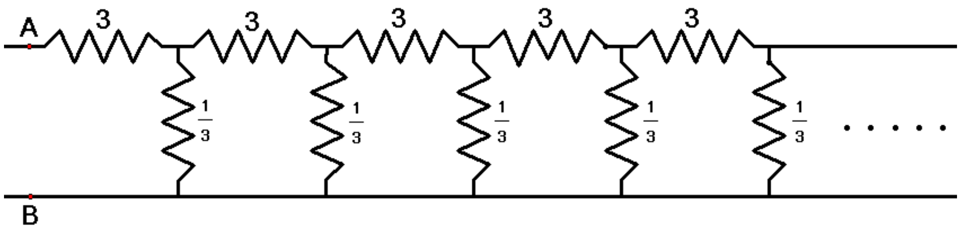
$$\Rightarrow \frac{bx}{x+b}=x-a \qquad \Rightarrow (x+b)(x-a)=bx \qquad \Rightarrow x^2-ax+bx-ab=bx$$

$$\Rightarrow x^2-ax-ab=0$$

因為 k＝3 的 K 金矩形的長邊：短邊的比值為 $\frac{\sqrt{13}+3}{2}$ ，

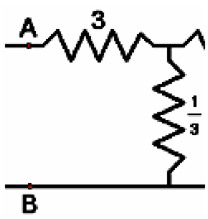
而 $\frac{\sqrt{13}+3}{2}$ 為方程式 $x^2-3x-1=0$ 之正根，

比較方程式 $x^2-3x-1=0$ 和 $x^2-ax-ab=0$ 的係數後得到 a＝3、b＝$\frac{1}{3}$，所以應該設計其電路為下圖的型式：



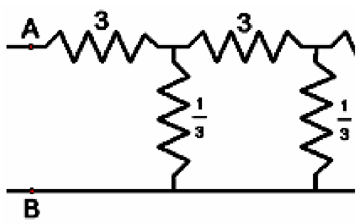
利用分段計算電阻可得：

1.



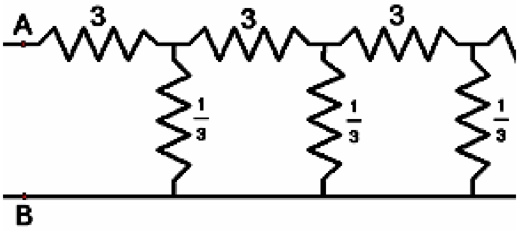
的電阻為 3＋$\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

2.



的電阻為 $\frac{1}{\frac{1}{(\frac{10}{3})}+\frac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\frac{109}{33}$

3.



的電阻為 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{109}{33})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\dfrac{1189}{360}$

依此類推…………

將出現的每階段電阻列出來：$\dfrac{10}{3}$、$\dfrac{109}{33}$、$\dfrac{1189}{360}$、…………，

可得數列 3，10，33，109，360，1189，…………，

令數列：$\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=10 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ （n 為正整數）

我們將證明：依照上述規律排列電阻的電路圖中其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的下一個數為 $\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ 。

<pf>將 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 再往後算一步

$$\frac{1}{\dfrac{1}{(\frac{a_{n+1}}{a_n})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+3}+3=\frac{1}{\dfrac{a_n+3a_{n+1}}{a_{n+1}}}+3=\frac{a_{n+1}}{a_n+3a_{n+1}}+3$$

（因為在數列 $\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=10 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ 中，$a_n+3a_{n+1}=a_{n+2}$）

原式 $=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+3=\dfrac{a_{n+1}+3a_{n+2}}{a_{n+2}}$

（因為在數列 $\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=10 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ 中，$a_{n+1}+3a_{n+2}=a_{n+3}$）

所以原式 $=\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$

因此，我們得到 k＝3 的 K 金矩形，其對應的數列為 3，10，33，109，

360，1189，…………即數列：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 10 \\ a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1} \end{cases}$ 。

利用「遞迴數列」的方法，仍然可以得到此數列：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 10 \\ a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1} \end{cases}$ ，

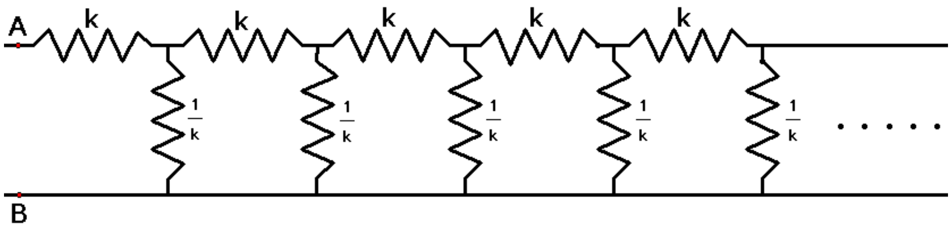
當 $n \to \infty$ 時，其 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{\sqrt{13}+3}{2}$ ；而 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{\sqrt{13}-3}{2}$

再用 excel 算看看：

k=3		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	3	
2	10	
3	33	3.30000000000000
4	109	3.30303030303030
5	360	3.30275229357798
6	1189	3.30277777777778
7	3927	3.30277544154752
8	12970	3.30277565571683
9	42837	3.30277563608327
10	141481	3.30277563788314
11	467280	3.30277563771814
12	1543321	3.30277563773326
13	5097243	3.30277563773188
14	16835050	3.30277563773201
15	55602393	3.30277563773199
16	183642229	3.30277563773199
17	606529080	3.30277563773199
18	2003229469	3.30277563773199
19	6616217487	3.30277563773199
20	21851881930	3.30277563773199
21	72171863277	3.30277563773199
22	238367471761	3.30277563773199
23	787274278560	3.30277563773199
24	2600190307441	3.30277563773199

25	8587845200883	3.30277563773199
26	28363725910090	3.30277563773199
27	93679022931153	3.30277563773199
28	309400794703549	3.30277563773199
29	1021881407041800	3.30277563773199
30	3375045015828950	3.30277563773199

（三）一般 K 金矩形的情況，可設計電路圖：



來求出 K 金矩形邊長比值所對應的數列為 $\begin{cases} a_1 = k \\ a_2 = 1 + k^2 \\ a_{n+2} = a_n + k a_{n+1} \end{cases}$ 。

柒、參考資料：

編號	書名	篇名	頁數	作者	譯者	出版社
1	選修數學第五冊	1－2 黃金篇	P26－P34	國立編譯館主編		國立編譯館
2	神奇數學 117	黃金分割與代數	P151－P154	Alfred S.Posamentier	葉偉文	天下文化
3	神奇數學 117	黃金矩形	P195－P199	Alfred S.Posamentier	葉偉文	天下文化
4	數學馬戲團	費波那奇數與盧卡斯數	P33－P49	Martin Gardner	蔡承志	遠流
5	高中數學教室單元系列 4－數列與級數	遞迴數列	P171－P174	陸思明		建宏

捌、附錄：

k=2（排正方形法）			k=2(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	2	
2	1		2	5	
3	3	3.00000000000000	3	12	2.40000000000000
4	7	2.33333333333333	4	29	2.41666666666667
5	17	2.42857142857143	5	70	2.41379310344828
6	41	2.41176470588235	6	169	2.41428571428571
7	99	2.41463414634146	7	408	2.41420118343195
8	239	2.41414141414141	8	985	2.41421568627451
9	577	2.41422594142259	9	2378	2.41421319796954
10	1393	2.41421143847487	10	5741	2.41421362489487
11	3363	2.41421392677674	11	13860	2.41421355164605
12	8119	2.41421349985132	12	33461	2.41421356421356
13	19601	2.41421357310014	13	80782	2.41421356205732
14	47321	2.41421356053263	14	195025	2.41421356242727
15	114243	2.41421356268887	15	470832	2.41421356236380
16	275807	2.41421356231892	16	1136689	2.41421356237469
17	665857	2.41421356238239	17	2744210	2.41421356237282
18	1607521	2.41421356237150	18	6625109	2.41421356237314
19	3880899	2.41421356237337	19	15994428	2.41421356237309
20	9369319	2.41421356237305	20	38613965	2.41421356237310
21	22619537	2.41421356237310	21	93222358	2.41421356237309
22	54608393	2.41421356237309	22	225058681	2.41421356237309
23	131836323	2.41421356237310	23	543339720	2.41421356237309
24	318281039	2.41421356237309	24	1311738121	2.41421356237309
25	768398401	2.41421356237309	25	3166815962	2.41421356237309
26	1855077841	2.41421356237309	26	7645370045	2.41421356237309
27	4478554083	2.41421356237309	27	18457556052	2.41421356237309
28	10812186007	2.41421356237309	28	44560482149	2.41421356237309
29	26102926097	2.41421356237309	29	107578520350	2.41421356237309
30	63018038201	2.41421356237309	30	259717522849	2.41421356237309

k=3（排正方形法）			k=3(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n−1)	n	a(n)	a(n)/a(n−1)
1	1		1	3	
2	1		2	10	
3	4	4.00000000000000	3	33	3.30000000000000
4	13	3.25000000000000	4	109	3.30303030303030
5	43	3.30769230769231	5	360	3.30275229357798
6	142	3.30232558139535	6	1189	3.30277777777778
7	469	3.30281690140845	7	3927	3.30277544154752
8	1549	3.30277185501066	8	12970	3.30277565571683
9	5116	3.30277598450613	9	42837	3.30277563608327
10	16897	3.30277560594214	10	141481	3.30277563788314
11	55807	3.30277564064627	11	467280	3.30277563771814
12	184318	3.30277563746483	12	1543321	3.30277563773326
13	608761	3.30277563775649	13	5097243	3.30277563773188
14	2010601	3.30277563772975	14	16835050	3.30277563773201
15	6640564	3.30277563773220	15	55602393	3.30277563773199
16	21932293	3.30277563773198	16	183642229	3.30277563773199
17	72437443	3.30277563773200	17	606529080	3.30277563773199
18	239244622	3.30277563773199	18	2003229469	3.30277563773199
19	790171309	3.30277563773199	19	6616217487	3.30277563773199
20	2609758549	3.30277563773199	20	21851881930	3.30277563773199
21	8619446956	3.30277563773199	21	72171863277	3.30277563773199
22	28468099417	3.30277563773199	22	238367471761	3.30277563773199
23	94023745207	3.30277563773199	23	787274278560	3.30277563773199
24	310539335038	3.30277563773199	24	2600190307441	3.30277563773199
25	1025641750321	3.30277563773199	25	8587845200883	3.30277563773199
26	3387464586001	3.30277563773199	26	28363725910090	3.30277563773199
27	11188035508324	3.30277563773199	27	93679022931153	3.30277563773199
28	36951571110973	3.30277563773199	28	309400794703549	3.30277563773199
29	122042748841243	3.30277563773199	29	1021881407041800	3.30277563773199
30	403079817634702	3.30277563773199	30	3375045015828950	3.30277563773199

k=4（排正方形法）			k=4(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	4	
2	1		2	17	
3	5	5.00000000000000	3	72	4.23529411764706
4	21	4.20000000000000	4	305	4.23611111111111
5	89	4.23809523809524	5	1292	4.23606557377049
6	377	4.23595505617978	6	5473	4.23606811145511
7	1597	4.23607427055703	7	23184	4.23606797003472
8	6765	4.23606762680025	8	98209	4.23606797791580
9	28657	4.23606799704361	9	416020	4.23606797747661
10	121393	4.23606797641065	10	1762289	4.23606797750108
11	514229	4.23606797756049	11	7465176	4.23606797749972
12	2178309	4.23606797749641	12	31622993	4.23606797749979
13	9227465	4.23606797749998	13	133957148	4.23606797749979
14	39088169	4.23606797749978	14	567451585	4.23606797749979
15	165580141	4.23606797749979	15	2403763488	4.23606797749979
16	701408733	4.23606797749979	16	10182505537	4.23606797749979
17	2971215073	4.23606797749979	17	43133785636	4.23606797749979
18	12586269025	4.23606797749979	18	182717648081	4.23606797749979
19	53316291173	4.23606797749979	19	774004377960	4.23606797749979
20	225851433717	4.23606797749979	20	3278735159921	4.23606797749979
21	956722026041	4.23606797749979	21	13888945017644	4.23606797749979
22	4052739537881	4.23606797749979	22	58834515230497	4.23606797749979
23	17167680177565	4.23606797749979	23	249227005939632	4.23606797749979
24	72723460248141	4.23606797749979	24	1055742538989020	4.23606797749979
25	308061521170129	4.23606797749979	25	4472197161895730	4.23606797749979
26	1304969544928660	4.23606797749979	26	18944531186572000	4.23606797749979
27	5527939700884760	4.23606797749979	27	80250321908183500	4.23606797749979
28	23416728348467700	4.23606797749979	28	339945818819306000	4.23606797749979
29	99194853094755500	4.23606797749979	29	1440033597185410000	4.23606797749979
30	420196140727490000	4.23606797749979	30	6100080207560940000	4.23606797749979

k=5（排正方形法）			k=5(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	5	
2	1		2	26	
3	6	6.00000000000000	3	135	5.19230769230769
4	31	5.16666666666667	4	701	5.19259259259259
5	161	5.19354838709677	5	3640	5.19258202567760
6	836	5.19254658385093	6	18901	5.19258241758242
7	4341	5.19258373205742	7	98145	5.19258240304746
8	22541	5.19258235429625	8	509626	5.19258240358653
9	117046	5.19258240539461	9	2646275	5.19258240356654
10	607771	5.19258240349948	10	13741001	5.19258240356728
11	3155901	5.19258240356977	11	71351280	5.19258240356725
12	16387276	5.19258240356716	12	370497401	5.19258240356725
13	85092281	5.19258240356726	13	1923838285	5.19258240356725
14	441848681	5.19258240356725	14	9989688826	5.19258240356725
15	2294335686	5.19258240356725	15	51872282415	5.19258240356725
16	11913527111	5.19258240356725	16	269351100901	5.19258240356725
17	61861971241	5.19258240356725	17	1398627786920	5.19258240356725
18	321223383316	5.19258240356725	18	7262490035501	5.19258240356725
19	1667978887821	5.19258240356725	19	37711077964425	5.19258240356725
20	8661117822421	5.19258240356725	20	195817879857626	5.19258240356725
21	44973567999926	5.19258240356725	21	1016800477252550	5.19258240356725
22	233528957822051	5.19258240356725	22	5279820266120400	5.19258240356725
23	1212618357110180	5.19258240356725	23	27415901807854600	5.19258240356725
24	6296620743372960	5.19258240356725	24	142359329305393000	5.19258240356725
25	32695722073975000	5.19258240356725	25	739212548334821000	5.19258240356725
26	169775231113248000	5.19258240356725	26	3838422070979500000	5.19258240356725
27	881571877640214000	5.19258240356725	27	19931322903232300000	5.19258240356725
28	4577634619314320000	5.19258240356725	28	103495036587141000000	5.19258240356725
29	23769744974211800000	5.19258240356725	29	537406505838937000000	5.19258240356725
30	123426359490373000000	5.19258240356725	30	2790527565781830000000	5.19258240356725